11.

(a) $\dfrac{1+2i}{3+4i} = \dfrac{(1+2i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \dfrac{3-8i^2+6i-4i}{9-16i^2} = \dfrac{11+2i}{25}$

(b) $1+i+i^2+i^3=0$, also ist $\sum_{k=0}^{n} i^k = \sum_{k=0}^{[n]_4} i^k$.

(c) $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac} = 2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4} = 2 \pm i$.

(d) $(a+ib)(c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc)$,

$(a-ib)(c-id) = (ac-bd)-i(ad+bc)$.

(e) Durch die komplexe Multiplikation $\mathbb{C}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist eine Skalarmultiplikation $\mathbb{R}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben. Aus den Körperaxiomen für $\mathbb{C}$ folgt, dass $\mathbb{C}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

(f) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ist ein Körper, damit ist $\mathbb{R}$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum wie in (e).

12.

$$\zeta = \frac{\sqrt{5} - 1 + i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

Wir schreiben $a = \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ .

$$\zeta^2 = \frac{1}{16}\left( (\sqrt{5} - 1)^2 - (10 + 2\sqrt{5}) + i\, 2 (\sqrt{5} - 1)\, a \right) =$$

$$= \frac{1}{16}\left( 5 + 1 - 2\sqrt{5} - 10 - 2\sqrt{5} + i\, 2(\sqrt{5} - 1)\, a \right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left( -2(\sqrt{5} + 1) + i\, (\sqrt{5} - 1)\, a \right)$$

$$\zeta^4 = \frac{1}{64} \cdot \Big( 4\,(\sqrt{5} + 1)^2 - (\sqrt{5} - 1)^2\, (10 + 2\sqrt{5})$$
$$- i\, 4\, (\sqrt{5} + 1)\, (\sqrt{5} - 1)\, a \Big) =$$

$$= \frac{1}{64}\Big( 4\,(5 + 1 + 2\sqrt{5}) - (6 - 2\sqrt{5})\, (10 + 2\sqrt{5})$$
$$- i\, 16a \Big) =$$

$$= \frac{1}{64}\left( 24 + 8\sqrt{5} - 60 + 20 + 8\sqrt{5} - i\, 16\, a \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{5} - 1 - ia}{4} .$$

$$\zeta^5 = \zeta \cdot \zeta^4 = \frac{1}{16}\left( (\sqrt{5} - 1)^2 - i^2 a^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{16}\left( 6 - 2\sqrt{5} + 10 + 2\sqrt{5} \right) = 1$$

<u>Bem:</u> Für $x = \zeta^0, \zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4$ gilt $x^5 = 1$ .

13. (a) Wenn $x \in f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$, dann ist $f(x) \in U$ und $f(x) \in V$, also $f(x) \in U \cap V$, also $x \in f^{-1}(U \cap V)$.

Wenn $x \in f^{-1}(U \cap V)$, dann ist $f(x) \in U \cap V \subseteq U$, also $x \in f^{-1}(U)$. Genauso ist $x \in f^{-1}(V)$.

(b) Angenommen $x \in f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$. Wenn $x \in f^{-1}(U)$, dann ist $f(x) \in U \subseteq U \cup V$, also $x \in f^{-1}(U \cup V)$. Wenn $x \in f^{-1}(V)$, dann ist genauso $x \in f^{-1}(U \cup V)$.

Angenommen $x \in f^{-1}(U \cup V)$. Dann ist $f(x) \in U \cup V$. Wenn $f(x) \in U$, dann ist $x \in f^{-1}(U)$. Wenn $f(x) \in V$, dann ist $x \in f^{-1}(V)$.

(c) Für $x, y \in A$ mit $x \neq y$ ist $f(x) \neq f(y)$, also $(g \circ f)(x) = g(f(x)) \neq g(f(y)) = (g \circ f)(y)$.

(d) Angenommen $z \in C$. Es gibt ein $y \in B$ mit $g(y) = z$ und ein $x \in A$ mit $f(x) = y$. Dann ist $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$.

(e) Angenommen $x, y \in A$, $x \neq y$ und $f(x) = f(y)$. Dann ist $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(y)) = (g \circ f)(y)$, ein Widerspruch dazu, dass $(g \circ f)$ injektiv ist.

(f) Für jedes $z \in C$ gibt es ein $x \in A$ mit $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = z$. Also ist $g(y) = z$ für $y = f(x)$.

14. (a) $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \iff \dfrac{2}{\frac{b+a}{ab}} \leq \sqrt{ab} \iff$

$\iff 2ab \leq \sqrt{ab}\,(a+b) \iff 4a^2b^2 \leq ab(a^2+2ab+b^2) \iff$

$\iff 4ab \leq a^2+2ab+b^2 \iff 0 \leq a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$

Also gilt die Ungleichung.

(Bemerkung: Das gilt in jedem angeordneten Körper)

(b) $\sum\limits_{k=0}^{n} a^k = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$ (geometrische Reihe, Satz 14 Vorl.konzept)

$$\sum_{k=0}^{n} a^k - \frac{1}{1-a} = \frac{(1-a^{n+1})-1}{1-a} = -\frac{a^{n+1}}{1-a}$$

Setze $\delta := \varepsilon \cdot |1-a|$. Wegen $a \neq 1$ ist $|1-a| > 0$.

Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $|a^m| < \delta$ nach Satz 30.

Dann ist $|a^{m+1}| = |a^m| \cdot |a| \leq |a^m| < \delta = \varepsilon \cdot |1-a|$.

Also gilt $\dfrac{|a^{m+1}|}{|1-a|} < \varepsilon$ und

$$\left|\sum_{k=0}^{m} a^k - \frac{1}{1-a}\right| = \left|\frac{a^{m+1}}{1-a}\right| = \frac{|a^{m+1}|}{|1-a|} < \varepsilon.$$

Wegen $|a^{\cancel{m}\,n+1}| \leq |a^{m+1}|$ für alle $\cancel{m}\,n \geq m$ gilt für alle $\cancel{m}\,n \geq m$:

$$\left|\sum_{k=0}^{\cancel{m}\,n} a^k - \frac{1}{1-a}\right| < \varepsilon.$$

15. (a) Setze $\mathcal{U} := \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$.

Wegen $0 \in \mathcal{U}$ ist $\mathcal{U} \neq \emptyset$.

Angenommen $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot v_j \in \mathcal{U}$, $y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j \in \mathcal{U}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dann gilt $x + y = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j + \beta_j) v_j \in \mathcal{U}$ und

$$\lambda \cdot x = \sum_{j=1}^{n} (\lambda \alpha_j) \cdot v_j \in \mathcal{U}.$$

(b) $\mathcal{L}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \}$ ist die Ebene durch die $x$-Achse und die $y$-Achse.

(c) Setze $U := \mathcal{L}\left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $V := \mathcal{L}\left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \right)$.

<u>$V \subseteq U$:</u> Setze $u := 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Also ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot u \in U$.

Setze $u' := 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

~~Da~~ Dann ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot u' \in U$.

Da $U$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^k$ ist, gilt $V \subseteq U$.

<u>$U \subseteq V$:</u>

Setze $v := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V$ und $v' := \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$.

Wir haben $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = v + 2v' \in V$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2v + v' \in V$.

Da $V$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^k$ ist, gilt $U \subseteq V$.